平成 23 年 12 月 9 日（金）1 限

平成 23 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　物理学者のアインシュタインは 1879 年 3 月 14 日にドイツのウルム市で生まれた。ここで生徒が 50 人のクラスにアインシュタインと誕生日が同じである学生がいる確率について考えよう。一年は 365 日であり、生誕確率は一年を通して均等な値 $p = 1/365$ であると仮定する。

(1) 誕生日がアインシュタインと同じ学生の人数 x を確率変数とする。x が従う確率分布の名称を答えよ。
(2) x が従う分布の確率関数を書け。
(3) クラスにアインシュタインと誕生日が同じ学生が 1 名以上いる確率を求めよ。計算には以下の数値を用いてよい。

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{50} \simeq 0.87$$

問題 2　区間 $[0, 1)$ で一様に分布する連続的な確率変数 x は、確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0, x \geq 1) \end{cases}$$

に従う。ここで同一の確率密度関数 $f(x)$ に従う 12 個の独立な確率変数 $x_i, i = 1, \ldots, 12$ を考えよう。

(1) 各確率変数 x_i の平均と分散を求めよ。
(2) 新しい確率変数 y を次のように定義する: $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} - 6$。$y$ の平均と分散を求めよ。
(3) y が従う分布の名称を述べよ。またこの分布が生成されることを保証する定理の名称とその概要を答えよ。

問題 3　1 次元格子点上を原点から出発して、単位時間ごとに 1 コマずつ右か左へ移動する粒子を考える。この粒子は、各時刻において確率 1/2 で左右どちらかへランダムに移動する。ここで時刻 n での粒子の座標 x を確率変数にとることにしよう。

(1) n 回のうち、右へ進んだ回数を n_+、左へ進んだ回数を n_- とする。n_+ と n_- を n と x を用いて表せ。
(2) 時刻 n での粒子の位置 x の分布を表す確率関数 $p(x, n)$ を求めよ。
(3) 時刻 n での粒子の位置 x の平均と分散を求めよ。
(4) 確率関数 $p(x, n)$ の長時間経過後での近似形を求めよ。以下の公式を用いてよい。

$$\log n! \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi)$$
$$\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad -1 < y \leq 1.$$

以上