力学演習1 全問題

平成30年度版

更新履歴

- 平成 30 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 29 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 28 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 27 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 26 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 25 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 24 年度版
  古寺哲幸、三浦伸一
- 平成 23 年度版
  青木真由美、三浦伸一
- 平成 22 年度版
  青木真由美、三浦伸一
- 平成 21 年度版
  内橋貴之、三浦伸一

1　ベクトル

1.1

二つのベクトル $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ について次の値を求めよ。$\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ $x,\ y,\ z$ 軸方向の単位ベクトルである。

(1) $|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{B}|$　　(2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$　　(3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$　　(4) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直な単位ベクトル　　(5)$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角

1.2

任意の 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について次式を証明せよ。

(1) スカラー三重積　$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

(2) ベクトル三重積　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

1.3

$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}$ の 3 つのベクトルを辺とする平行 6 面体の体積は、$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix}$ とすると、行列式 $|\boldsymbol{V}|$ で表わされることを示せ。

1.4

(1) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ点 A, B の位置ベクトルとする。2 点 A, B を通る直線上の任意の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は、次の式で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{A} + (1-t)\boldsymbol{B}$$

(2) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ をそれぞれ 3 点 A, B, C の位置ベクトルとする。3 点 A, B, C で決定される平面上の任意の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は、次の式で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} + \nu\boldsymbol{C}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

1.5

2 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から、直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は次のように構成できることを示せ。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1|}$$

1.6

ベクトル $\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$、$\boldsymbol{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z(t))$ およびスカラー $\phi(t)$ は時間 t の関数である。次式を示せ。

$$\frac{d}{dt}(\phi\boldsymbol{A}) = \frac{d\phi}{dt}\boldsymbol{A} + \phi\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

2　運動の法則

2.1

2 隻のボート A, B が, それぞれ u, v の速度で同時に同じ場所から動き始め、a, b の加速度で直線コースを進み同時にゴールに到達した。コースの長さ L を u, v, a, b で表せ。

2.2

一定の加速度で直線軌道の上を進む長さ 2ℓ の列車がある。ある地点 O を通過するとき、その前端は速度 u_1、後端は速度 u_2 であったとすれば列車の中央の点はどれだけの速度で通過したか。

2.3

静止した滑らかな水平面上におかれた板（質量 M）の上で人（質量 m) が板に対して加速度 a で歩く時、板は水平面に対してどのような加速度をもつか。また人と板が互いに水平に及ぼし合う力はどれだけか。

2.4

水平な滑らかの床の上に一様な鎖（質量 M，長さ ℓ）をまっすぐにして置く。その一端を長さの方向に一定の力 F で引っ張る時、鎖の加速度 a と他端からの距離 x の点での張力はどれだけか。

2.5

xy 平面で極座標 (r, θ) を用いるとき、速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ は次のようになることを示せ。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ はそれぞれ r と θ 方向の単位ベクトルである。

2.6

次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ。そして、括弧内の条件をみたす特解を求めよ。

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad (1+x)\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad (y(1) = 4) \\
&(2) \qquad \frac{dy}{dx} - y = x, \qquad (y(0) = 2)
\end{aligned}$$

3　簡単な運動 I

3.1

(1) 初速度 v_0 で投げ出された質点の水平到達距離を、同じ初速度で鉛直上方に投げた時の最高点の高さに等しくするにはどの方向に投げればよいか。

(2) ボールを斜め上方に投げたとき、その初速と角度を精密に測るのは容易ではない。そこでボールの到達距離 X と飛行時間 T からこれを求めたい。必要な公式を求めよ。

3.2

水平と β の角をなす斜面の最下点から、斜面と垂直に交わる鉛直面内で、斜面と α の角をなす方向に初速度 v_0 で質量 m の質点を投射するとき、次のものを求めよ。

(1) 斜面に落下するまでの時間 t_1 と斜面上の到達距離 L_1

(2) 最大到達距離 L_m とその時の投射角 α_m

(3) 質点が斜面に垂直に落下するときの投射角 α と斜面の角度 β の関係

3.3

一様な重力の下で水平に x 軸、上方に y 軸をとる。xy 平面内で、原点から x 軸と仰角 θ の方向に初速 v_0 で質点を投げたときの (1) 質点の軌道、(2) 位置 (x_1, y_1) に到達させせる角度（タンジェント）と (3) 到達範囲を求めよ。

3.4

一様な重力の下で速度に比例した空気抵抗 (大きさ kmv) を受けるとき、水平から角 θ をなす方向に速さ v_0 で投げ上げられた質量 m の質点の運動について次のものを求めよ。

(1) t 秒後の速度と位置

(2) 最高点の高さ

(3) 十分時間が経って, ほぼ一定になった時の速度

3.5

速度に比例した空気抵抗（単位質量あたりの比例係数 k）がある場合の放物運動で、最大の水平到達距離の得られるのは、投射角 α と落下角 β とが余角をなす場合（$\alpha + \beta = \pi/2$）であることを示せ。

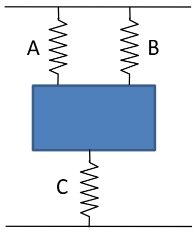
3.6

速度の２乗に比例した空気抵抗（単位質量あたりの比例係数 k）が働くとき、鉛直上方に初速度 v_0 で投射した物体の位置を速度の関数として求めよ。また、最高点の高さを求めよ。

4　簡単な運動 II

4.1

３本のばね $A,\ B,\ C$ によって質量 m の物体が図のように支えられている。ばね定数 k および自然長 ℓ_0 がすべて同じで、図の位置でも同じ長さ ℓ になっているとき、上下振動の周期を求めよ。



4.2

質量の無視できるばねをつり下げ、下端に質量 m_0 の小さい皿をつけ上下に振動させると周期は T_0 であった。次に、皿に質量 m_1 の重りをのせたら、ばねはその自然長より a だけ伸びた。次に、質量 m_1 の重りを取り除いて、皿にある物体をのせて振動させると周期が T であった。その物体の質量を m_1, T, T_0, a, g を用いて表せ。

4.3

次の 2 階非同次線形微分方程式を考えよう。

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

同次方程式 $L(y) = 0$ の 2 つの独立な解 y_1, y_2 が求められたとする。定数変化法により、上記の微分方程式の一般解は、A_1, A_2 を任意定数として、

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1y_1 + A_2y_2 - y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx + y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx \\ \Delta(x) &= y_1y_2' - y_1'y_2 \end{aligned}$$

と求まることを示せ。

4.4

x 軸上で運動する質量 m 質点が、原点に引き戻そうとするフックの力 $-kx$ と速度に比例した抵抗 $-\gamma\dot{x}$ を受ける時の運動を求め、振動の様子を図示せよ。

4.5

(1) x 軸上の運動で、フックの力 $-kx$ と強制力 $f_0\cos\omega t$ が働くときの運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx + f_0\cos\omega t$$

の一般解を求めよ。ただし $\omega \neq \sqrt{k/m}$ とする。

(2) $\omega = \sqrt{k/m}$ の場合の一般解を求めよ。

4.6

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の一様な磁場に、初速度 $\boldsymbol{v}$、質量 m、電荷 $-e$ の電子が垂直に入射した。電子はどのような運動をするか。

4.7 $(\star)$

電場 $\boldsymbol{E} = (ax, ay, 0)$ の場の中で電子（質量 m, 電荷 $-e$）が xy 平面上を運動している。ただし、$a > 0$ とする。

(1) 電子は単振動していることを示せ。

(2) 外部から磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0),\ B_0 > 0$ の磁場をかけたとき、振動が 2 つに分離することを示せ。ここで電子の位置座標 x, y に対し、複素数 $z = x + iy$ を使うとよい。

5　運動方程式の変換、力学的エネルギー

5.1

点 P の運動が xy 座標系で $x = a\cos\omega t, y = a\sin\omega t$ （a, ω は定数）と表されるとき、

(1) 点 P の速度と加速度を 2 次元極座標系で求めよ。

(2) 位置ベクトルと速度ベクトル、速度ベクトルと加速度ベクトルがそれぞれ直交することを示せ。

5.2

3 次元極座標系 (r, θ, φ) での速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ の表式を求めよ：

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

ここで $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ は r, θ, φ 方向の単位ベクトルである。

5.3　($\star\star$)

らせん $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = k\varphi$（$a, k$ は定数）の接線、主法線、陪法線の方向および曲率半径を求めよ。また、らせんに沿って定速 V で進む点の加速度を求めよ。

5.4

一端を固定した長さ ℓ の軽い糸の他端に質量 m のおもりをつけ、糸を水平にした位置からおもりを静かに放した。糸が鉛直になったときの糸の張力を求めよ。

5.5

平面内を運動する質点に働く力 $\boldsymbol{f}$ の成分が $f_x = axy, f_y = by^2$ （a, b は定数）で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{f}$ が保存力であるかどうか調べよ。

(2) x 軸上の点 A$(r, 0)$ から y 軸上の点 C$(0, r)$ まで半径 r の円周に沿って動く場合と、弦 AC に沿って動く場合の、$\boldsymbol{f}$ のする仕事を比べよ。

5.6

(1) $\phi(x, y, z) = c =$ 一定、は曲面を表す。この曲面 S と $\nabla\phi$ は垂直であることを示せ。

(2) $\phi(x, y, z) = 1/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のとき、$\nabla\phi$ を求めよ。

5.7

力が次式で与えられたとする。以下の問いに答えよ。

$$f_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\ f_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\ f_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

(1) ポテンシャルをもつための条件を求めよ。

(2) その条件が成り立つときのポテンシャルを求めよ。

5.8 ($\star$)

(1) 質量 m の質点が力 $\boldsymbol{f}$ の作用の下で運動している時、その運動エネルギー K に対して

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f}}$$

が成り立つことを示せ（ビリアル定理）。ここで上付きの棒は長時間平均（例えば、$\overline{K} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K dt$）を表し、運動は周期的あるいは有界であるとする。

(2) (1) で示した定理を用いて、質点が 1 次元の単振動をするときの運動エネルギーと位置エネルギーの時間平均が等しいことを示せ。

6　中心力、角運動量保存

6.1

大きさが相互距離 r の関数 $f(r)$ である中心力は, ポテンシャル $-\int_{r_0}^{r} f(r)dr$ をもつことを示せ。

6.2

質量 m の質点が xy 平面上で, 半径 a, 角速度 ω の等速円運動をするときの運動量 $\boldsymbol{p}$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ の各成分を求めよ。

6.3

質点が定点 O からの中心力を受けて運動するとき、次のことを証明せよ。

(1) O のまわりの角運動量は一定である。　(2) 質点は平面運動を行い、O のまわりの面積速度は一定である。

6.4

質量 m の質点が中心力と速度に比例する抵抗力 (比例係数 : γ) とを受けて運動するとき、中心力の中心点の角運動量の時間変化を求めよ。ただし、$t=0$ での角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L_0}$ とする。

6.5

質点が固定点 O からの距離に比例する引力 $F=-\ mk\boldsymbol{r}$ を受けて平面運動するとき、その軌道を求めよ。ただし、$t=0$ のとき $y=0$ とする。

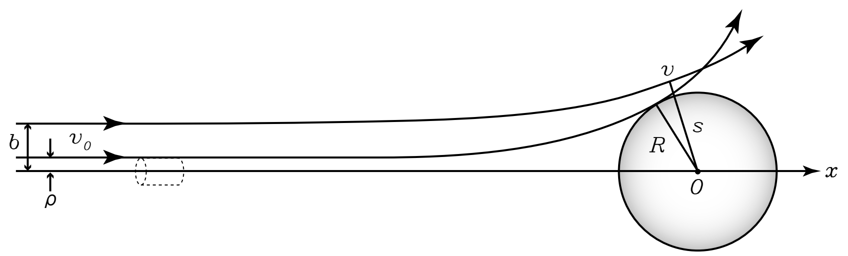
6.6　($\star$)

平面内において、力の中心を極とする極座標で $r=a(1+b\cos\phi)$ で与えられる軌道を描く質点に働く中心力はどんな力か。ただし、$r^2\frac{d\phi}{dt}=h$ とする。

6.7

x 軸上の定点 O を中心とする半径 R の球が球外の粒子に斥力を及ぼす。そのポテンシャルは、O からの距離を r としたときに $U(r)$ （ただし $r=\infty$ で $U(r)=0$）で与えられる。無限遠で運動エネルギー K をもった粒子が飛んできてこの球面に衝突するためには、この粒子は十分遠方で対称軸が x 軸で断面積 σ が次式で与えられる円柱内を通らなければならないことを示せ：

$$\sigma=\pi\rho^2=\pi R^2\left\{1-\frac{U(R)}{K}\right\}$$



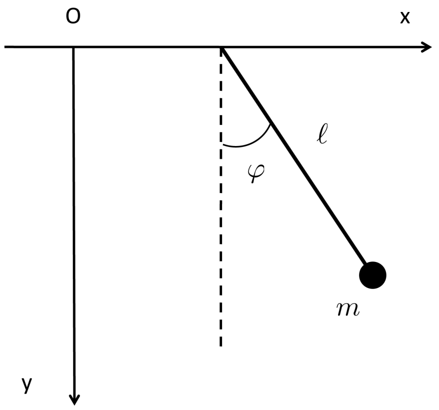
7　単振り子と惑星

7.1

長さ ℓ の軽い糸の先に質量 m のおもりをつけた単振り子に、最下点で水平に v_0 の初速を与えた。v_0 が小さいために運動が鉛直面内の最下点付近に限られているとして、おもりの運動の振幅と周期、および糸の張力を求めよ。

7.2

長さ ℓ、おもりの質量 m の単振り子の支点が、ばね定数 k の軽いばねによって水平に左右に動き得る場合、微小振動の周期を求めよ。ただし，ばねの自然長の位置を原点にとる。

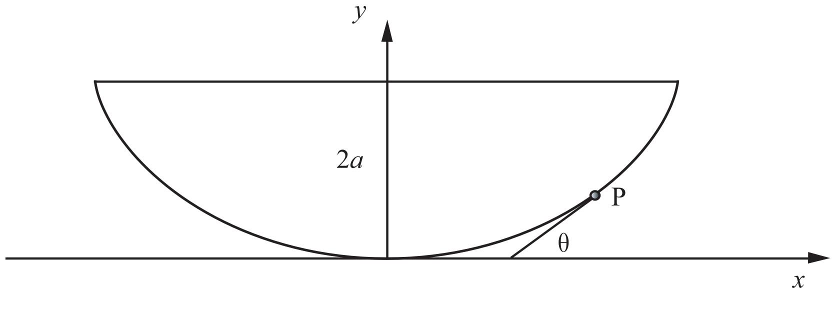


7.3

上を凹面にして鉛直面内に鉛直線に対して対称の位置におかれたサイクロイド曲線に滑らかに束縛された質点が重力の作用を受けながら運動している。その往復運動の周期は振幅によらないことを示せ。ただし、サイクロイド曲線は次の式で表される。

$$
\begin{aligned}
x &= a(2\theta + \sin 2\theta) \\
y &= a(1 - \cos 2\theta)
\end{aligned}
$$

ここで x は水平、y は鉛直方向をあらわし、a は定数である。



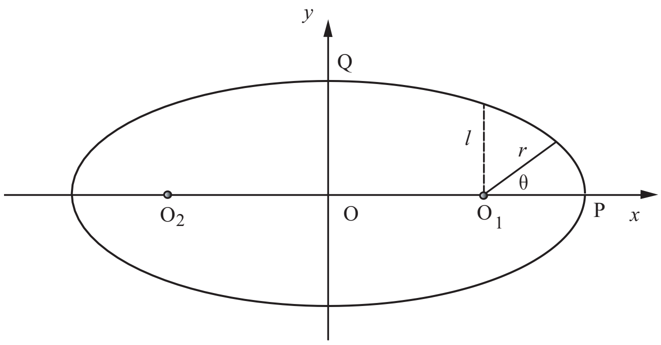
7.4

楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ を、焦点を原点とする極座標を用いて以下の手順で表す。

(1) 長径 a と短径 b を、離心率 e、半直弦 ℓ を用いて表せ。

(2) (1) の結果を用いて、楕円は次式で表せることを示せ：

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$



7.5

質量 m の質点が中心力 $mf(r)$ 受けて運動している。2 次元極座標系 (r, θ) を用い、$u = 1/r$ とおくと、軌道は方程式

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2u^2} f(\frac{1}{u})$$

から決定されることを示せ。ただし、h は面積速度の 2 倍を表わす。

7.6

(1) 問題 7.5 の式を用いて、万有引力 $mf(r) = -m\mu/r^2$ を受けて運動する質点の軌道は、力の中心を焦点とする以下の円錐曲線で表されることを示せ：

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

ここで ℓ は半直弦、e は離心率である。ただし、角 θ は $\theta = 0$ で r が極小となるように測る。

(2) r の極小値（$\theta = 0$）でのエネルギーを h, ℓ, e を用いて表せ。

(3) また、楕円軌道の場合には運動の周期 T は楕円の長径の 3/2 乗に比例することを示せ。

7.7 (⋆)

質量 M、半径 a の密度一様な球の中心から R の距離にある点 Q に質量 m の質点をおく。この質点について以下の問いに答えよ。

(1) $R > a$ および $R < a$ のときの万有引力のポテンシャルを求めよ。

(2) それぞれの場合について、ポテンシャルから力を計算せよ。

8　非慣性系に相対的な運動

8.1

(1) 一定加速度 α で鉛直に上昇するエレベーターの中で、床から h の高さの所から水平に速さ v で投げた質点がエレベーターの床に落下するまでの水平方向の移動距離を求めよ。

(2) 一定加速度 α で一直線の水平なレール上を走る列車の中で、床から h の高さの所から物体を静かに落とすとき、物体が床につくまでの時間と、そのときの水平方向の移動量を求めよ。

8.2

一定加速度 α で上昇するエレベータ内で次のものを測った値は、地上で測った値の何倍になるか。
(1) ばね秤で測った物体の重さ　　(2) 振り子の周期

8.3

列車の天井から質量 m の物体を長さ ℓ の糸でつるす。次の場合の糸の張力、糸が鉛直線となす角を求めよ。また釣り合いの位置のまわりで微小振動させるときの周期を求めよ。

(1) 列車が定加速度 α で水平な軌道上を直線運動するとき。

(2) 列車が曲率半径 ρ の曲線にそって定速度 v で進行するとき。

8.4　($\star$)

水平台の上にある傾角 θ の斜面上に小物体をのせ、斜面を一定加速度 a で動かすとき小物体が斜面上で静止しているための加速度の範囲を求めよ。斜面と小物体の静止摩擦係数は μ とする。

8.5

長さ ℓ の糸を一点 O からぶら下げ、下端に質量 m の質点をつけ、糸が一定の傾きを保ちながら鉛直線の周りを質点が水平面内で円運動をするようにする。糸の傾きが θ の時、回転の周期 T と糸の張力 R を求めよ。

8.6

xyz 座標系を慣性系とする。これに対して原点 O を共有し z 軸と z' 軸とを一致させ、その周りに一定の角速度 ω で回転する $x'y'z'$ 座標系がある。この回転座標系での運動方程式の表式を求めよ。

8.7

質量 m、電荷 q の荷電粒子に電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が働いている。磁場は一定で z 軸の方向に向いている：$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$。

(1) z 軸のまわりに角速度 ω で回転する座標系 (x', y', z') を考える。この座標系での荷電粒子の運動方程式を書き下せ。ただし、B, ω は小さいものとし、$\omega^2, B\omega$ の項は省略せよ。

(2) 荷電粒子が電場の下に運動をするとき、z 軸の方向に磁場 B が加わると粒子の運動は磁場のない時の運動を、z 軸のまわりに $\omega_L = -qB/2m$ の角速度で回したものになることを示せ。

8.8　($\star\star$)

北緯 λ の地点で地上 h の高さの点から自由落下する質点は、角速度 ω で自転する地球上に固定された座標系からみるとどの様な運動になるか。ただし、ω は非常に小さいため ω^2 に比例して変化する加速度の影響は無視できるとする。

9　質点系の運動量と角運動量

9.1

静止している原子核が運動量 p_1 の電子を放出し、それと直角の方向に運動量 p_2 の中性子を放射した。残った原子核（質量 m ）は、どの方向に、いくらの運動量とエネルギーをもって反跳するか。

9.2

軸を水平に固定した滑らかな円柱に軽い糸をかけ、その各端に質量 m_1, m_2 のおもりをつけて静かにはなしたとする。おもりの加速度、糸の張力、おもりが距離 h だけ移動したときの速さを求めよ。

9.3

質量 m_1, m_2 の 2 物体が互いに及ぼしあう力だけのもとに運動している。

(1) 物体 2 の運動を物体 1 から見ると、物体 2 の質量が $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ となったように見えることを示せ。ただし物体 1 から物体 2 への位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とせよ。

(2) この 2 質点系の角運動量 $\boldsymbol{L}$ と運動エネルギー T を、μ および全質量 $M = m_1 + m_2$ を用いて表せ。ただし、重心の座標は $\boldsymbol{r}_0$ とせよ。

9.4

はじめ静止していた質量 m_0 の雨滴が、単位時間に μ の割合で周囲の静止した水滴を取り込みながら重力場の中を落下していく。時間 t 後の速度 v を求めよ。

9.5

机の上に密度の一様な鎖がひとかたまりにしておいてある（鎖の線密度を σ とせよ）。

(1) 鎖の一端をつまんで一定の速さ v_0 で鉛直に引き上げたい。引き上げた長さが y になったときにはどれだけの力で引っ張らなければならないか。

(2) また一定の力 f_0 で引き上げる場合には、y だけ引き上げたときの速さはどれだけか。

9.6　(⋆⋆)

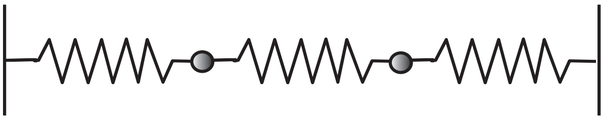
水平で滑らかな台の上に、まっすぐに伸ばしておかれた長さ ℓ の綱が台から滑り落ちる。台上の綱の方向は台の縁に直角で、x_0 だけの長さが縁から垂れ下がった状態から運動がはじまる。

(1) 綱は曲がるときに抵抗を受けないものとすると、力学的エネルギーが保存されることを示せ。なお、綱の線密度を ρ とせよ。

(2) また綱の端が台からはなれるまでの時間 T を計算する式をつくれ。

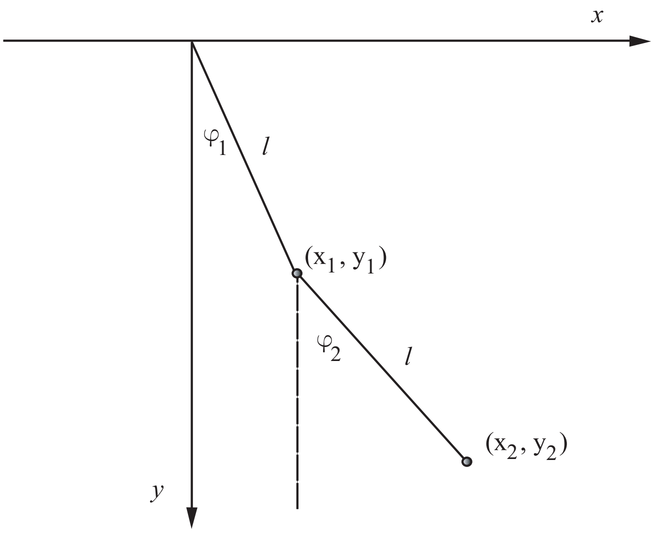
9.7

質量 m の 2 個の小さい物体と、自然長 ℓ 、ばね定数 k の 3 本の軽いばねとを図のように連結して、なめらかな水平面上に 3ℓ だけ隔たった 2 点にその両端を固定する。この系のばねに沿う方向の振動を調べよ。



9.8 (⋆)

質量の無視できる長さ ℓ の伸びない糸の一端を固定し、他端に質量 m の質点をつける。その質点にさらに長さ ℓ の伸びない質量の無視できる糸を結び、その先に質量 m の質点をつける。この装置の鉛直面内での微小振動を調べよ。



10　剛体のつりあい

10.1

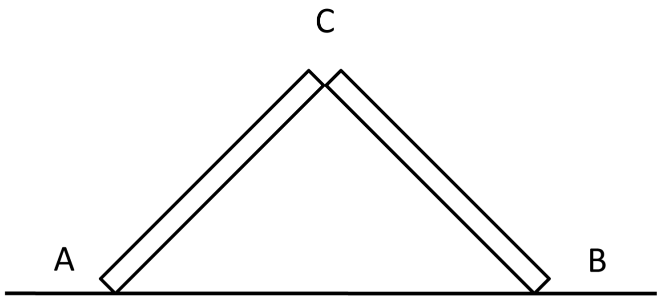
滑らかな鉛直の壁の前方 a のところの床の上から長さ ℓ、質量 M のはしごをかける。はしごに質量 m の人が静かに登るとき、人はどこまで登ることができるか。はしごと床の間の摩擦係数を μ とする。

10.2

一様な棒を鉛直な壁と水平な床との間に立てかけるのに棒と壁および床との間の摩擦係数を μ_1、μ_2 とすると、つりあうときの棒と床との角度の範囲を求めよ。

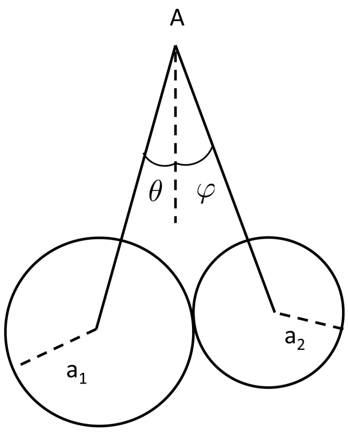
10.3

２枚の等しい矩形板 AC、CB を C 点で蝶番で連結して、他端 A、B を粗い水平面上に載せる。水平面の摩擦係数を μ とするとき、つりあいの位置での角 ∠ACB を求めよ。



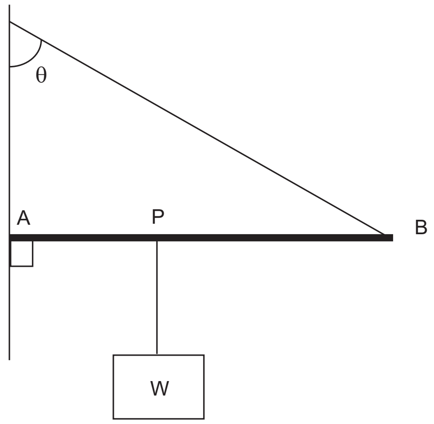
10.4

半径 a_1、a_2、質量 m_1、m_2 の２つの一様な滑らかな球を長さ ℓ の軽い糸でつなぎ、滑らかな水平釘 A にかけて、球を接触した状態で静止させるときの糸の張力を求めよ。ただし，最終的な張力の表式に θ と φ を用いないこと。



10.5

図のように長さ ℓ の質量の無視できる棒 AB の点 P(AP=a) に重さ W のおもりを吊り下げ、A 端を鉛直な壁に滑らかな蝶番でとりつけ、さらに B 端に糸をつけて A の真上の点 C 結んで水平に支えた。このとき糸と壁との角度は θ であった。糸の張力と A 端での抗力を求めよ。

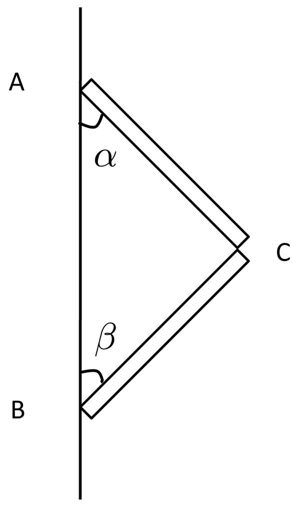


10.6 ($\star$)

水平な床の上に３つの等しい円柱を正三角形の位置に積んだとき、そのままつりあっているためには円柱と床との間、および円柱間の摩擦係数 μ_1、μ_2 はどんな値でなければならないか。

10.7

２本の一様なまっすぐの棒 AC、BC の重さをそれぞれ $W1$、$W2$、その長さをそれぞれ $2a$、$2b$ とする。AC,BC は C で滑らかにつながれ、他端 A および B は鉛直線上に固定されている。A, B, C における抗力を求めよ。



11 固定軸を持つ剛体の運動、慣性モーメント

11.1

(1) 任意の直線 ℓ に関する物体の慣性モーメントを I 、その物体の重心 G を通って ℓ に平行な直線 ℓ_G に関する慣性モーメントを I_G とする。また、物体の質量を M、ℓ と ℓ_G の間の距離を h とすると、$I = I_G + Mh^2$ であることを示せ。

(2) 薄い平面状の物体がある。物体の平面内に互いに垂直に x 軸と y 軸をとり、それらに垂直に z 軸をとったとすると、各軸に関する慣性モーメントの間には

$$I_z = I_x + I_y$$

という関係式が成り立つことを示せ。

11.2

全質量 M、半径 a、高さ h の一様な円柱がある。次の直線に関する慣性モーメントを計算せよ。

(1) 円柱の軸

(2) 円柱の中心を通って軸に垂直な直線

11.3

一様密度で質量 M の

(1) 半径 a の球

(2) 外半径 b 、内半径 a の球殻

(3) 半径 a の薄い球殻

の球心を通る軸に関する慣性モーメントを求めよ。

11.4 $(\star\star)$

(1) 両軸が $2a, 2b$ の一様な楕円板の対称軸に関する慣性モーメントを求めよ。全質量を M とする。

(2) 3 軸が $2a, 2b, 2c$ である一様な楕円体の各軸に関する慣性モーメントを求めよ。全質量を M とする。

11.5

半径 a、質量 M の一様な球に、重さが無視できる軽い棒をつけて振り子を作る。支点から球の重心までの距離を ℓ とする。

(1) この振り子の微小振動の周期を求めよ。

(2) $a/\ell \ll 1$ の時、球を質点と見なした時の振り子の周期と一致することを示せ。

11.6

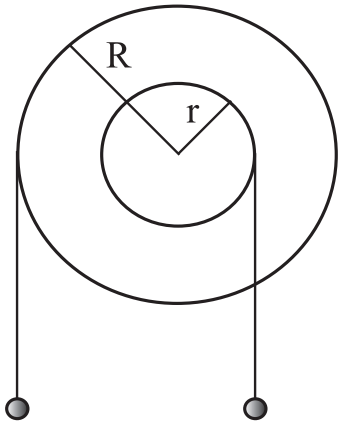
一端が固定され、そのまわりに鉛直面内で回転できるようなまっすぐな棒（質量 M、長さ ℓ ）が水平の位置から初速度なしに落とされたとき任意の位置での角速度を求めよ。ここで棒が鉛直下方となす角を φ とする。

11.7

半径 a の一様な円板が粗い水平面（摩擦係数 μ' ）に触れて中心を通る鉛直軸のまわりに回転している。初めの角速度が ω_0 ならば回転の止まるまでにどれだけの時間を要するか。

11.8 $(\star)$

水平軸のまわりに回転する輪軸（水平軸のまわりの慣性モーメント I、輪の半径 R、軸の半径 r）に糸をまき、図のように等しい質量 m の物体をつるして輪軸をまわすとき、その角加速度および 2 本の糸の張力を求めよ。



12　剛体の平面運動

12.1

半径 a、質量 M の一様な円板が水平と θ の角をなす粗い斜面上を滑らずに転がるときの重心の加速度と摩擦力を求めよ。また、静止摩擦係数が μ のとき斜面に静かに置かれた円板がすべらずに転がるための条件を求めよ。

12.2

(1) 前問で円板が斜面をすべらずに転がるとき、エネルギー保存則から円板の重心の加速度を求めよ。

(2) 球が初速度 v_0 で斜面上をすべらずに転がり上がるとき、止まるまでに斜面上を転がる距離を求めよ。ただし、斜面と水平のなす角を θ とする。

12.3

２つの円板を半径 r の短い軸で向かい合わせにつないで、軸の周りに糸を巻きつけたヨーヨーの運動について考える。ヨーヨーの質量を M、慣性モーメントを I として次の問いに答えよ。

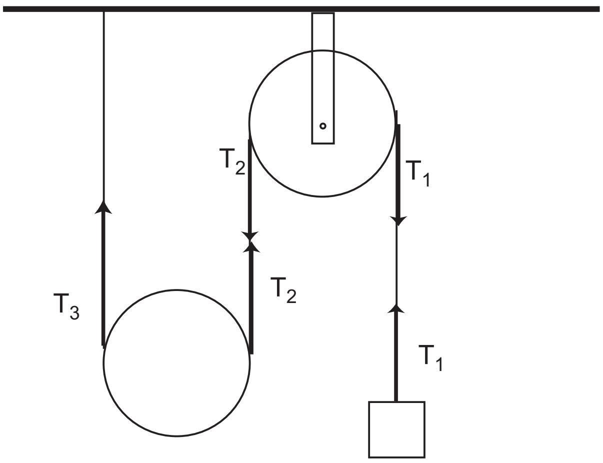
(1) ヨーヨーが下りるときおよび上がっていくときの糸の張力を求めよ。

(2) 降りていくとき、ヨーヨーを常に一定の位置にあるようにするためには、糸の上端をどのように動かせばよいか。

(3) 糸の上端を滑らかな釘にかけ、その端にヨーヨーと同質量の物体をつるして放した時、ヨーヨーと物体はどのような運動をするか。

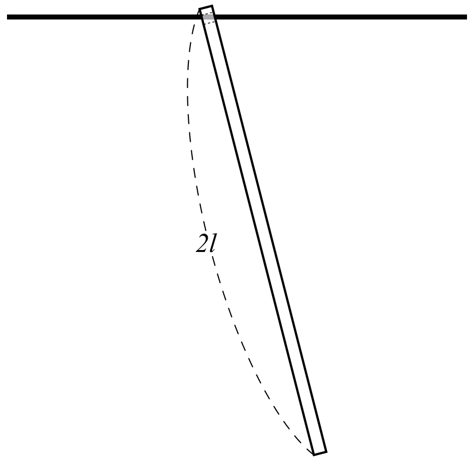
12.4

図のように定滑車および動滑車に細い糸をかけ、糸の一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけたとき、糸の各部の張力 $T_1,\ T_2,\ T_3$ を求めよ。ただし、２つの滑車はいずれも半径 a、質量 M の円板とし、糸と滑車の間にすべりはないものとする。



12.5

質量 M、長さ 2ℓ の一様な棒の上端が水平な固定軸上に滑らかに束縛されている（すなわち、棒の上端は滑らかに固定軸上を左右に動くことができる)。棒が固定軸を含む鉛直面内で微小振動するときの周期を求めよ。ただし、棒が固定軸に束縛されることによる質量の変化は無視できるものとする。



12.6

半径 a、質量 M の一様な円輪上の一点 P に質量 m の質点が付いている。円輪は P が最高点にある位置から初速度なしで転がりだし、水平面上を滑らずに一つの鉛直平面内を運動する。P を通る円輪の半径が鉛直下方と θ の角をなす位置にあるときの円輪の角速度を求めよ。

12.7　$(\star)$

一様な円板（半径 a、質量 M）が鉛直面内に固定された粗い円輪（半径 b）の内面に接してすべらずに転がる運動は $\dfrac{3}{2}(b-a)$ の長さを持つ単振子と同様であることを示せ。

13　撃力、慣性楕円体、固定点を持つ剛体

13.1

ある座標系に対して慣性テンソルの成分が A_{ij} と表されるとき、同じ原点を通り方向余弦 α, β, γ を持つ直線 g に関しての慣性モーメント I_g は

$$I_g = A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{23}\beta\gamma + 2A_{31}\gamma\alpha + 2A_{12}\alpha\beta$$

と表されることを示せ。

13.2　($\star$)

底面の半径 a、高さ h の直円錐体の頂点における慣性楕円体を求め、それが球になるための条件を求めよ。

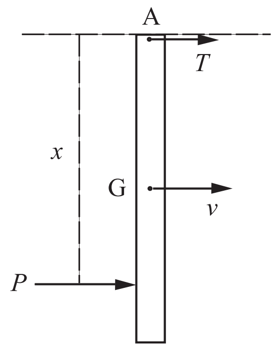
13.3

図のように、一端 A を通る固定軸のまわりに自由に回転することのできる長さ ℓ、質量 M の一様な棒がある。点 A から距離 x のところで棒に垂直に撃力 P を与えた。次の量を求めよ。

(1) この瞬間に点 A を通る軸が棒から受ける撃力。

(2) その撃力が 0 になるような x の値。

(3) 撃力を受けた直後の棒の角速度。



13.4

一端を通る水平軸のまわりに自由に回転できるようにした長さ ℓ、質量 M の一様な棒の振り子がある。この振り子が軸の真下を向いて静止している状態のとき、棒の中点に水平方向の撃力 P を与えたところ、棒は微小振動をはじめた。撃力を受けた瞬間を時間の原点とし、そのあとの振れの角 $\theta = \theta(t)$ を求めよ。

13.5

質量 M、半径 a の円板が 1 つの直径を固定軸として回転できるようになっている。質量 m の物体が速さ v で円板に垂直にとんできて、円周上の軸から最も遠い点に衝突した

(1) 衝突後の円板の角速度を求めよ。

(2) 物体が円板に与えた撃力を求めよ。

ただし、反発係数は 0.5 である。

13.6

質量 M、半径 a のビリヤードの球を水平な床の上に静止させておき、中心から h だけ上の点に撃力 P を水平に加える。そのあとの球の重心の移動速度 $u(t)$ および回転角速度 $\omega(t)$ を求めよ。ただし、球と床の間の動摩擦係数を μ とする。

13.7

固定点 O のまわりに剛体が回転している。点 O に関する剛体の主慣性モーメントを I_1, I_2, I_3 とし、慣性主軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする。

(1) 剛体が角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとき、角運動量 $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{e}_1 + L_2\boldsymbol{e}_2 + L_3\boldsymbol{e}_3$ について次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{dL_1}{dt}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dL_2}{dt}\boldsymbol{e}_2 + \frac{dL_3}{dt}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}$$

(2) 角運動量に対する運動方程式 $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{N}$ の慣性主軸方向の成分を求め、オイラーの運動方程式を導け。

13.8　($\star\star$)

対称こまの自由回転について以下のものを求めよ。

(1) こまに対する角速度ベクトルの運動

(2) 空間での回転についてオイラー角 $\theta,\ \varphi,\ \psi$ の変動