平成 28 年 12 月 9 日（金）1 限

平成 28 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　連続的な確率変数 x は，次の確率密度関数 $f(x)$ に従っている:

$$f(x) \propto e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

ここで μ，σ は定数である。必要に応じて以下の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0.$$

(1) 確率密度関数の比例係数を定めよ。

(2) 平均 $\langle x \rangle$ を計算せよ。

(3) 分散 $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$ を計算せよ。

問題 2　六面体のサイコロを考えよう。サイコロに偏りはなく，すべての目のでる確率は等しい。このサイコロを n 回投げて，1 の目が出る回数を x とする。

(1) 確率変数 x の従う確率分布の名称を答えよ。

(2) 確率関数 $p(x)$ を求めよ。

(3) 確率変数 x のすべての値に対する確率の和は 1 となっていることを示せ。

(4) 確率変数 x の平均と分散の値を計算せよ。

問題 3　一次元格子点 x 上を運動する粒子を考える。その粒子は原点から出発して，単位時間ごとに 1 コマずつ右か左へ移動する: $x \to x+1$ or $x-1$。この粒子は各時刻において確率 p で右へ，確率 $1-p$ で左へと移動する。ここで時刻 i での粒子の座標を x_i と表そう。時刻 n での粒子の位置 x_n は，各時刻での変位 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ を用いて以下のように表すことができる:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

変位 Δx_i はそれぞれ独立な確率変数であり、x_n はその和として定義される確率変数である。

(1) 確率変数 Δx_i の平均 $\langle \Delta x_i \rangle$ と分散 $\langle (\Delta x_i - \langle \Delta x_i \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

(2) 問 (1) の結果を用いて，確率変数 x_n の平均と分散を求めよ。

(3) 長時間経過後，x_n はどのような分布に従うか答えよ。

以上