平成 27 年 11 月 27 日（金）1 限

平成 27 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　確率変数 x が次の確率密度関数に従っている。

$$f(x) = \begin{cases} ax(2-x), & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

(1) 定数 a を決定せよ。

(2) x の平均，分散，標準偏差を求めよ。

(3) 同一の確率密度関数 f に従っている n 個の独立な確率変数 $x_1, \ldots, x_n$ を考えよう。その和

$$y = x_1 + \cdots + x_n$$

は，いかなる確率密度関数に従うか。具体的に書け。

問題 2　確率変数 x の確率分布に対するモーメント母関数 $\Phi(\xi)$ を考えよう。母関数は，以下の式で定義される:

$$\Phi(\xi) = \langle e^{\xi x} \rangle.$$

(1) 次式を示せ。

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \langle x \rangle, \quad \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \left\langle x^2 \right\rangle$$

(2) 次式を示せ。

$$\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2.$$

(3) ポアソン分布 $\mathrm{P}(\lambda)$ の確率関数は，次のように書くことができる:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

そのモーメント母関数を求めよ。

(4) ポアソン分布 $\mathrm{P}(\lambda)$ の平均と分散をモーメント母関数より求めよ。

問題 3　離散的な確率変数 x について考えよう。その確率変数は，二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従っている。

(1) 確率関数 $p(x)$ を求めよ。

(2) すべての x に対して $p(x)$ の和をとると，1 となることを示せ。

(3) n が十分大きい時の確率関数の表式を求めよ。必要に応じて，大きな自然数 m に対する次の近似式を用いてよい: $m! = (m/e)^m$。

ヒント：x を連続変数として扱い，確率関数のピーク周りの振る舞いを調べること。

以上