平成 24 年 12 月 7 日（金）1 限

平成 24 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　ゲーム好きのフランス人貴族メレ氏は友人たちと「サイコロ 2 つを 24 回振って，6 のゾロ目が出る回数」についての賭けをした。サイコロを振ったときに 2 個とも同じ数字が出た場合をゾロ目という。

(1) ゾロ目が出る回数を確率変数 x とする。変数 x が従う確率分布の名称を答えよ。

(2) 確率変数 x が従う確率関数 $p(x)$ を書け。

(3) x に関する確率の総和は 1 となっていることを示せ。

(4) 変数 x の平均と分散を計算せよ。計算結果は分数で表してよい。

(5) メレ氏は「少なくとも 1 回 6 のゾロ目が出る」ことに賭けた。彼が賭けに勝つ確率を計算せよ。計算には次の数値を用いてよい：$(\frac{35}{36})^{24} \simeq 0.51$。

問題 2　確率変数 x は，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従っている。その確率密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

である。

(1) 確率の総和は 1 となっていることを示せ。

(2) 平均 $\langle x \rangle$ と分散 $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$ を定義に従って計算すると，それぞれ μ と σ^2 となることを示せ。

(3) 正規分布の特性関数 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ。ただし $\hat{f}(\xi) = \langle e^{i\xi x} \rangle$ である。

(4) 正規分布の全てのキュミュラント κ_n，$(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ を求めよ。

問題 3　1 次元の格子点上を時間 Δt 毎に移動するカニの集団を考えよう。カニたちは 1 回の移動で Δx 離れた隣の格子点に必ず移る。移動は各ステップ左右等確率であり，それぞれのカニは独立に移動する。この時，時刻 t に場所 x にいるカニの総数を $u(x,t)$ とする。

(1) 1 ステップでのカニの移動を考えることにより $u(x, t + \Delta t), u(x - \Delta x, t), u(x + \Delta x, t)$ の間に成り立つ差分方程式を導け。

(2) 問 1 で得られた式を $\Delta x, \Delta t$ が小さいとして，各項を x, t まわりでテイラー展開し，$\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ の極限で成り立つ偏微分方程式を導け。ただし $(\Delta x)^2/\Delta t = 2D$ の条件下での極限を考えること（D は定数）。

(3) 次の関数は問 2 で求めた偏微分方程式の解になっていることを示せ。

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

またこの関数が時間と共にどのように変化していくのか，各時間での平均と標準偏差について言及しながら説明せよ。

以上