平成 22 年 12 月 3 日（金）1 限

平成 22 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　サイコロを二つ振って、出る目の合計が偶数か奇数であるかをあてる日本古来の賭けがある。ここで偶数を丁、奇数を半と呼ぶ。

(1) 丁となる確率 p と半となる確率 q を求めよ。
(2) サイコロを n 回振った場合の丁の回数 x を確率変数にとる。x が従う分布の名称を答えよ。
(3) 確率変数 x が従う確率関数 $p(x)$ を求めよ。
(4) サイコロを 10 回振った場合の丁の回数の期待値（つまり平均 $\mu = \langle x \rangle$）を求めよ。
(5) サイコロを 10 回振った場合、丁の回数が $\mu - 1, \mu, \mu + 1$ となる確率の和

$$p(\mu - 1) + p(\mu) + p(\mu + 1)$$

を計算せよ。

問題 2　連続的な確率変数 x が正規分布に従っている。確率密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

である (μ と σ^2 は、それぞれ平均と分散)。以下の問いに答えよ。必要であれば次の公式を用いてよい ($a > 0$)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

(1) 確率の和は 1 となっていることを示せ。
(2) 平均 $\langle x \rangle$ が、μ となることを示せ。
(3) 次の関係式を示せ: $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$.
(4) 分散 $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$ が、σ^2 となることを示せ。

問題 3　体積 V の箱の中に N 個の気体分子が封入されている。平均の分子数密度は $\rho = N/V$ である。この時、箱の中の微小体積 v の中に存在する気体分子の数 x の分布を考えよう。

(1) 一つの分子が体積 v の中に存在する確率 p を求めよ。
(2) 体積 v の中に分子を x 個見いだす確率を求めよ。
(3) 分子数の平均 $\langle x \rangle$ を求めよ。
(4) 分子数密度 $\rho = N/V$ を一定に保ったまま $N \to \infty, V \to \infty$ の極限をとることを考えよう（熱力学的極限)。この極限における分布の確率論における名称を答えよ。また、この極限での分子数分布を書け。

以上