平成 21 年 11 月 20 日（金）1 限

平成 21 年度計算実験序論 2　中間試験問題　（担当教員　三浦伸一）

問題 1　教室内にパソコンが 100 台設置してある。各パソコンが 1 万時間以内に故障する確率は 0.01 であり、各々の事象は独立とする。ここで 1 万時間以内に故障するパソコンの数 x $(0 \leq x \leq 100)$ を確率変数としよう。以下の問いに答えよ。

(1) 確率変数 x が従う分布の名称を答えよ。

(2) 確率変数 x が従う確率関数 $p(x)$ を求めよ。

(3) 確率変数 x の平均 $\langle x \rangle$ と分散 $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

(4) 1 万時間以内に故障するパソコンが 1 台以下となる確率を計算せよ。なお、計算には次の数値を用いてよい：$(0.99)^{99} = 0.370$.

問題 2　以下の公式を証明せよ。ここで定数 a は正の実数である $(a > 0)$。

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

問題 3　質量 m の原子 N 個からなる温度 T の気体を考えよう。それぞれの原子の速度は、マクスウェル分布に従う。i 番目の原子の速度の x 成分 v_{ix} の分布 $f(v_{ix})$ は

$$f(v_{ix}) = C\ e^{-\frac{m}{2k_BT}v_{ix}^2} \qquad (\star)$$

と書ける。ここで k_B はボルツマン定数、C は分布を規格化するための定数である。以下の問いに答えよ。なお、必要であれば問題 2 の公式を用いてよい。

(1) 速度 v_{ix} を確率変数と見なした場合、分布 $(\star)$ の確率論における名称を答えよ。

(2) 速度分布 $f(v_{ix})$ の規格化定数 C を決定せよ。

(3) 速度の平均 $\langle v_{ix} \rangle$ と分散 $\langle (v_{ix} - \langle v_{ix} \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

(4) 気体の全運動エネルギー $K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_i^2$ の期待値 $\langle K \rangle$ を求めよ。ここで $\boldsymbol{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ は i 番目の原子の速度である。期待値の計算には、気体原子の同時速度分布が次のように書けることを用いること：

$$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N) = C^{3N} e^{-\sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2k_BT}\boldsymbol{v}_i^2}.$$

問題 4　数直線 x 上を原点から出発して、単位時間ごとに 1 コマずつ右か左へ移動する粒子を考える ($x \to x+1$ or $x-1$)。この粒子は、各時刻において確率 1/2 で左右どちらかへランダムに移動する。ここで時刻 n(0 以上の整数) での粒子の位置を x_n とすると、各時刻での変位 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ を用いて以下のように表すことができる：

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

それぞれの Δx_i を確率変数とみなせば、x_n は n 個の独立な確率変数の和として定義されることになる。以下の問いに答えよ。

(1) 確率変数 Δx_i の平均 $\langle \Delta x_i \rangle$ と分散 $\langle (\Delta x_i - \langle \Delta x_i \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

(2) 問 (1) の結果を用いて、確率変数 x_n の平均と分散を求めよ。

(3) 長時間経過後、x_n はどのような分布に従うか答えよ。

以上